ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — MAI 1979

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES ELEVES-PILOTES DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 H 00
COEF. : 7

Ce sujet comporte 5 exercices indépendants. Les candidats doivent choisir 4 exercices, et quatre seulement, parmi les cinq proposés. Ils doivent indiquer leur choix en tête de leur copie. Ne sera corrigée que la rédaction correspondant à ce choix

EXERCICE N°1

a, b, c étant trois nombres réels quelconques, on considère l'ensemble E des matrices M(a,b,c) de la forme :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ o & a & b \\ o & o & a \end{pmatrix}$$

On note : I = M(1,0,0) , J = M(0,1,0) et K = M(0,0,1).

1°) Montrer que E, muni de la loi d'addition des matrices et de la loi de leur multiplication par les réels, est un espace vectoriel sur le corps des réels dont {I, J, K} constituent une base.

Montrer que la multiplication des matrices est une loi de composition interne des éléments de E.

Démontrer que E est un anneau unitaire qui n'est pas intègre.

A quelle condition les éléments de E sont-ils inversibles et, dans le cas où la condition est satisfaite, déterminer leur inverse.

2°) n étant un entier positif, étudier $\left[bJ + cK\right]^n$, puissance n de $\left[bJ + cK\right]$; en déduire les composantes sur {I, J, K} de $M^n(a,b,c)$, puissance n de M(a,b,c).

Soit $M_n(a,b,c) = I + \frac{M(a,b,c)}{1!} + \frac{M^2(a,b,c)}{2!} + \ldots + \frac{M^n(a,b,c)}{n!}$,

déterminer les composantes α_n, β_n, γ_n de $M_n(a,b,c)$ sur {I, J, K}, ainsi que leurs limites α, β, γ lorsque n tend vers l'infini.

.../...

EXERCICE N°2

e désignant la base des logarithmes népériens, on considère la fonction y de la variable réelle x définie, pour tout $x \neq o$, par :

$$y : x \to y(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

1°) Calculer les trois premières dérivées de y et montrer, plus généralement, que pour tout entier n positif :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n P_n(x)\, x^{-2n}\, e^{\frac{1}{x}}$$

où P_n est un polynôme d'indéterminée x. On déterminera le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.

2°) Appliquant la formule de Leibnitz à l'équation différentielle du premier ordre que vérifie y, déterminer une relation de récurrence entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.

Démontrer les relations :

(1) : $P'_n(x) = n(n-1)\, P_{n-1}(x)$

(2) : $n(n-1)\, P_n(x) - (1 + (2n-2)\, x)\, P'_n(x) + x^2\, P''_n(x) = 0$,

$P'_n(x)$ et $P''_n(x)$ étant les dérivées première et seconde de $P_n(x)$.

Déterminer tous les coefficients de P_n en utilisant la relation (2).

3°) Appliquant le théorème de Rolle aux relations (1) et (2), démontrer que les zéros de P_n sont réels, distincts et séparés par les zéros de P_{n-1} lorsque $n > 1$, en utilisant la relation de récurrence entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2} trouvée au début de la 2ème question.

EXERCICE N°3

On considère la fonction y de la variable réelle x définie par les relations :

$$u : x \to u(x) = \frac{x \sin\alpha + \cos\alpha}{-x\cos\alpha + \sin\alpha} \quad , \quad y : x \to y(x) = e^{u(x)}$$

où e est la base des logarithmes népériens et α un paramètre réel tel que $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$.

1°) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes Ox, Oy, étudier le graphe C_α de y : définir les asymptotes, étudier la concavité et déterminer les coordonnées (x_I, y_I) du point d'inflexion I.

C_α se compose de deux branches distinctes, C^1_α et C^2_α, dont l'une C^1_α passe par le point A de coordonnées $(x_A = \text{tg}\,\alpha,\ y_A = o)$.
Déterminer les coordonnées (x_B, y_B) du point B de C^1_α, distinct de A, où la tangente passe par A.

Vérifier que $x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ et que $y_B^2 = y_S\, y_I$, où y_S est l'ordonnée de l'asymptote parallèle à Ox.

Tracer avec soin le graphe C_α pour $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

2°) Selon les valeurs de m, discuter le nombre de points de C_α où la pente de la tangente vaut m.

En déduire, selon les valeurs de m et p, le nombre de points réels d'intersection de C_α avec la droite d'équation :

$$y = m\,x + p.$$

.../...

EXERCICE N°4

1°) L'entier n étant strictement positif, montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$$

a un sens, déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et calculer la valeur de I_n.

2°) Posant $y = t\,x$, où t est une fonction de x, déterminer les fonctions y vérifiant l'équation différentielle :

$$(E) \qquad 2x^3 y' - 3x^2 y - y^3 = 0.$$

Retrouver ces fonctions en divisant le premier membre de (E) par y^3 et en posant $z = \frac{1}{y^2}$ pour les valeurs de x qui n'annulent pas y.

3°) Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'axes Ox, Oy, tracer le graphe C de la fonction y qui vérifie (E) et dont l'asymptote a pour équation $x = 1$.

Calculer l'aire algébrique comprise entre l'axe Ox, l'asymptote et la partie du graphe C dont les points ont une ordonnée positive.

Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'asymptote de C de l'aire comprise entre C et son asymptote.

EXERCICE N°5

1°) Etablir les formules :

$$U = \sum_{p=o}^{n-1} \cos (a + p\,h) = \cos \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \frac{\sin \frac{n\,h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} ,$$

$$V = \sum_{p=o}^{n-1} \sin (a + p\,h) = \sin \left(a + \frac{n-1}{2} h\right) \frac{\sin \frac{n\,h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} ,$$

en étudiant $U + iV$

2°) Calculer les sommes :

$$A = \sum_{p=1}^{n} \cos p\,x \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{p=1}^{n} \sin p\,x$$

En déduire la somme des n premiers entiers positifs.

3°) Calculer les sommes :

$$C = \sum_{p=1}^{n} p \cos p\,x \quad , \qquad D = \sum_{p=1}^{n} p \sin p\,x$$

$$E = \sum_{p=1}^{n} p^2 \cos p\,x \quad , \qquad F = \sum_{p=1}^{n} p^2 \sin p\,x$$

En déduire les sommes des carrés et des cubes des n premiers entiers positifs.

4°) En appliquant les résultats précédents, calculer les valeurs de :

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} \ ;$$

$$\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13} .$$

5°) C_n^p désignant le nombre des combinaisons de n objets p à p, calculer les sommes :

$$G = \sum_{p=o}^{n} C_n^p \cos (p + 1)x \quad ; \quad H = \sum_{p=o}^{n} (-1)^p C_n^p \sin (p + 1)x .$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail